Zeepvliezen PO

door M. van den Bosch- Knip
mirjamvdbk@gmail.com

Meetkunde

Presentatie 16-11-2016

WiskundeCongres

Uw spreker

Ir Mirjam van den Bosch- Knip RBA MSc MSc

- TU Twente: Chemische Technologie
- Rabobank: handelaar in derivaten
- ABN AMRO Bank: hoofd risico management

- UVA: 1^{e} graads docent wiskunde + scheikunde
- Montessori Lyceum Flevoland: 2011-

OPZET PRESENTATIE

- PO zeepvliezen, waarom?
- Inrichting van PO
- Link naar analytische meetkunde
- Punt van Torricelli (Bewijs van Steiner)
- Resultaten
- Zelf ervaren

Waarom zeepvliezen?

- Er is gekozen om een PO te doen
- Doel:

  ‘Met behulp van zeepvliezen de leerling zich laten verwonderen en belangstelling opwekken voor de meetkunde’

  (past binnen analytische meetkunde)

Kost dit niet te veel tijd?

- NEE!
- Goed plannen 5 lessen (70 min):
  - introductieles (spelen met cirkels)
  - Les 1
  - Les 2 + prakticum (kortste wegennet)
  - Les 3
  - Les 4 + prakticum (ruimtefiguren)
- Daarnaast selectie maken van vragen uit boek.

PO bestaat uit:

- Introductieles – spelen met cirkels

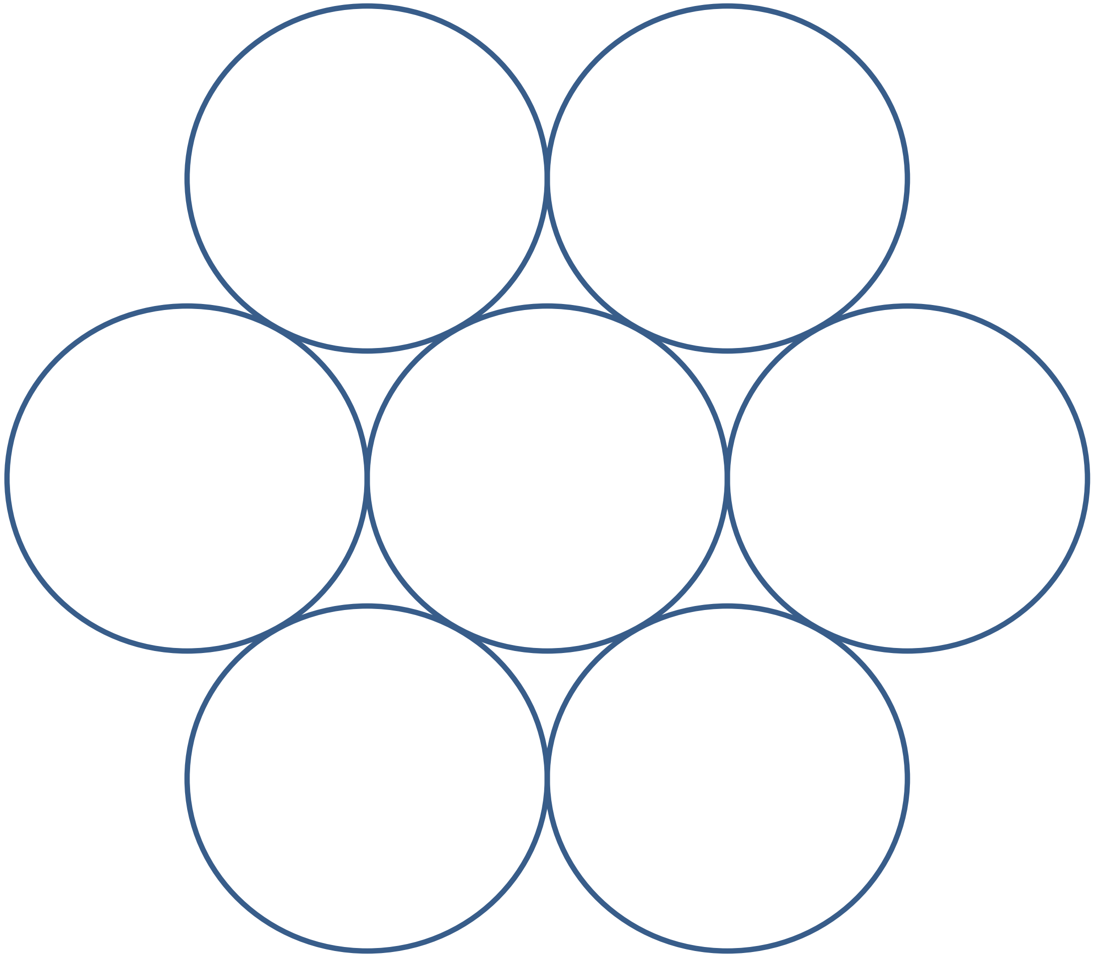
- Werkboekje met opdrachten (per tweetal inleveren)

- Individuele afsluitende proef

  (combi hoofdstuk proef en werkboek)

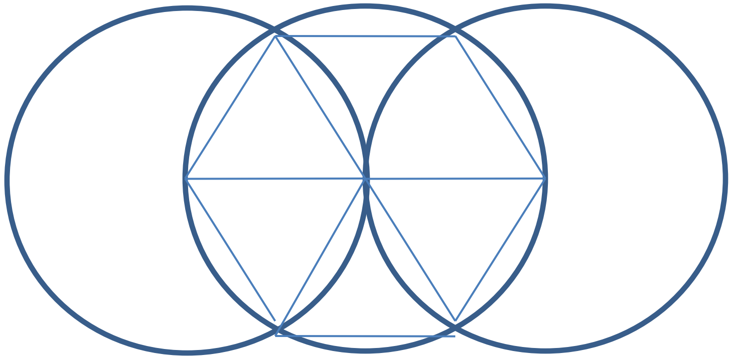
Introductieles

- Hoeveel cirkels er om één cirkel passen.

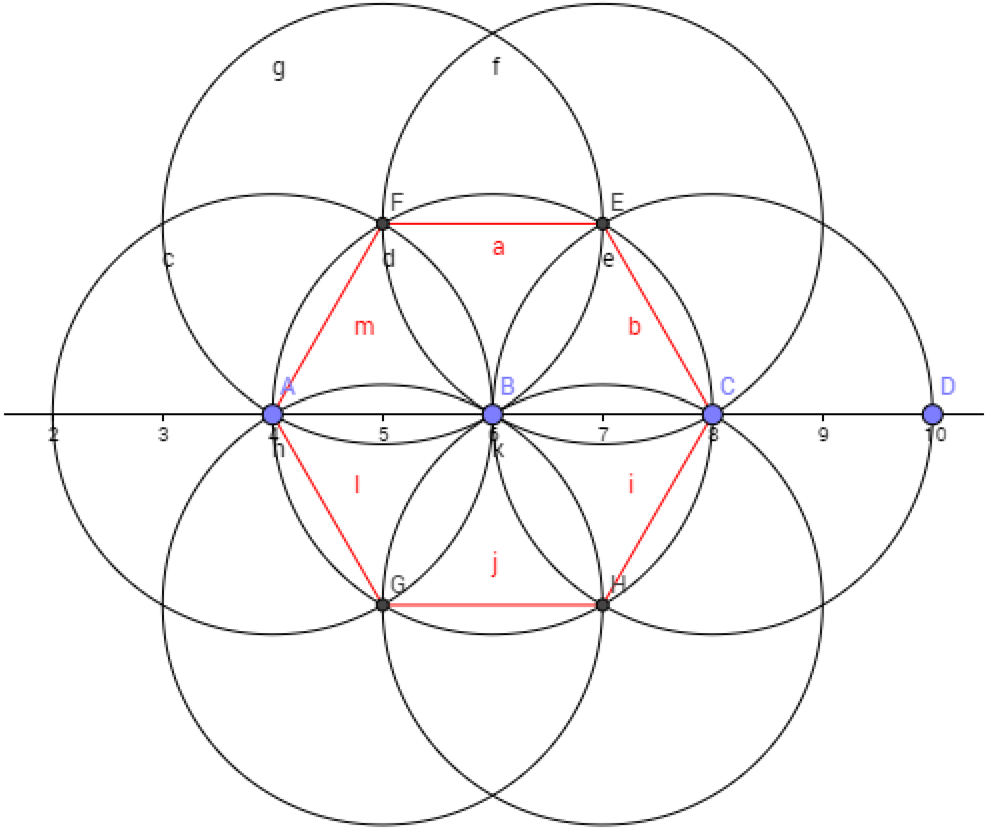


Introductieles

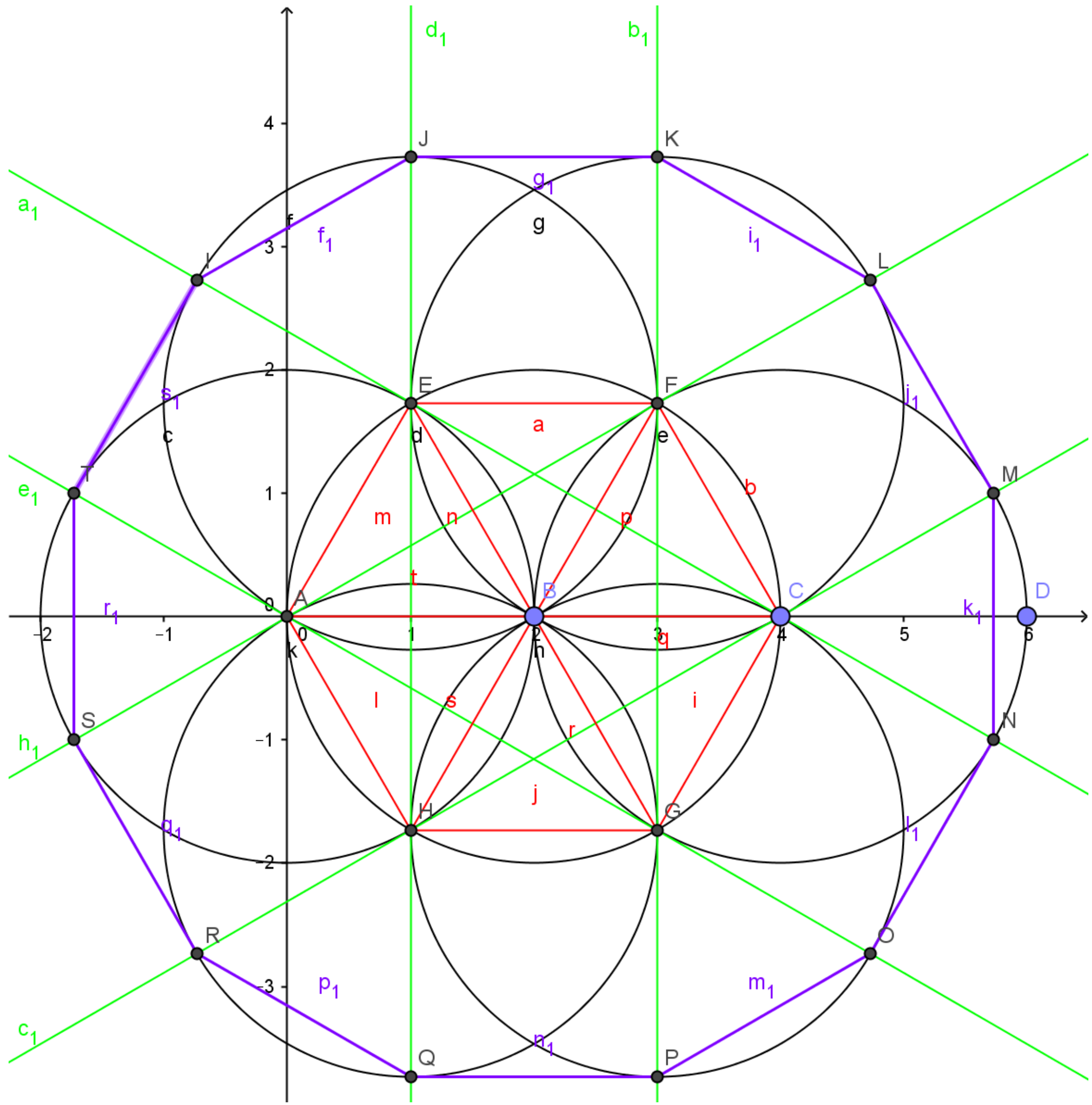
- Kijk hoe 3 cirkels één 6 hoek voortbrengen:



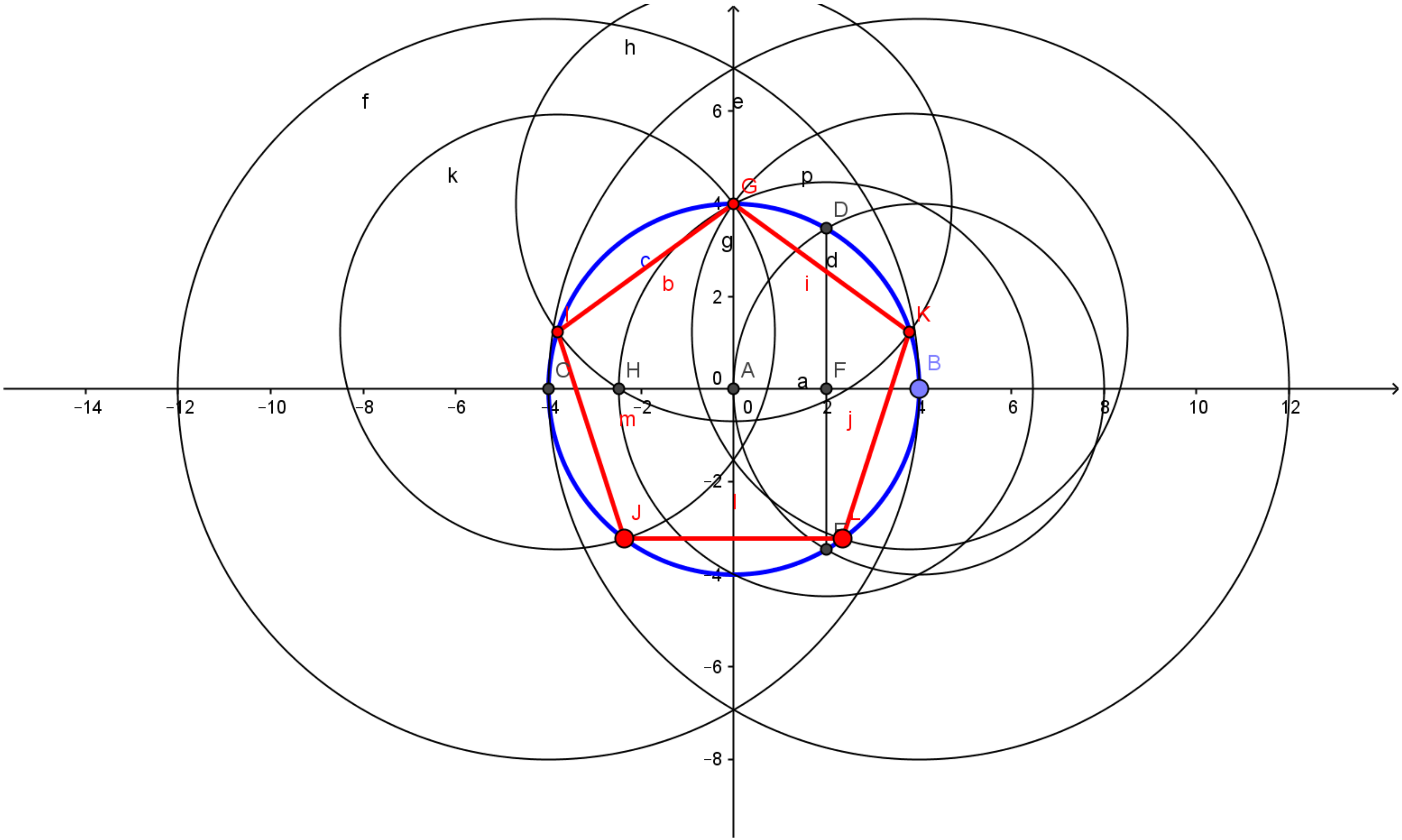
Constructie van 12 hoek stap 1



Constructie
12 hoek
stap 2



Constructie 5 hoek

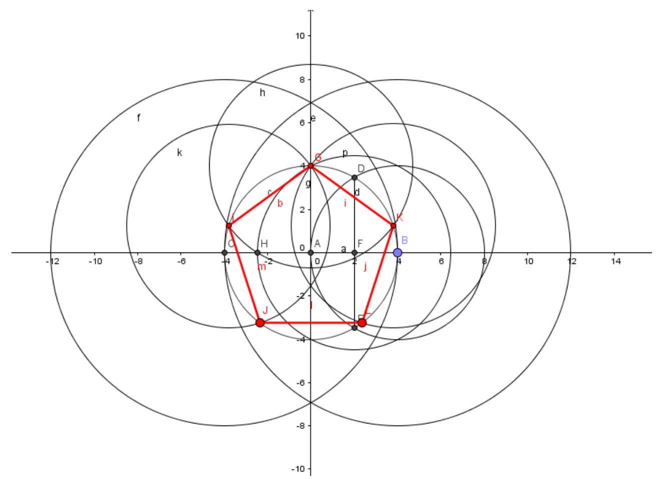


Voor de liefhebber: 5 hoek

- Teken een cirkel, met middelpunt A in de oorsprong. Zet de passerpunt op punt B en trek een cirkel met straal AB. Maak de passer wijd en trek de cirkel met middelpunt B en straal BC (C op negatieve x as en cirkel A), en de cirkel met middelpunt C en straal BC. Deze snijden elkaar boven en onder cirkel A.
- Neem een liniaal een verticaal door de snijpunten van cirkel B (straal AB) te trekken.
- Zet de passerpunt op F (het snijpunt met de verticaal en de x-as en maak een cirkel door het bovenste punt op de cirkel A. Vervolgens wordt op dezelfde passerwijdte de punt van de passser in het bovenste punt op de cirkel A nog een cirkel gemaakt door H. Dit levert twee hoekpunten van de 5-hoek op.
- Draai dan achtereenvolgens met de passerpunt op deze nieuwe punten van bovenaf om de laatste twee punten van de 5-hoek te vinden.

- Succes.

- Klik hiernaast op de 5 hoek om een constructiefilm te bekijken



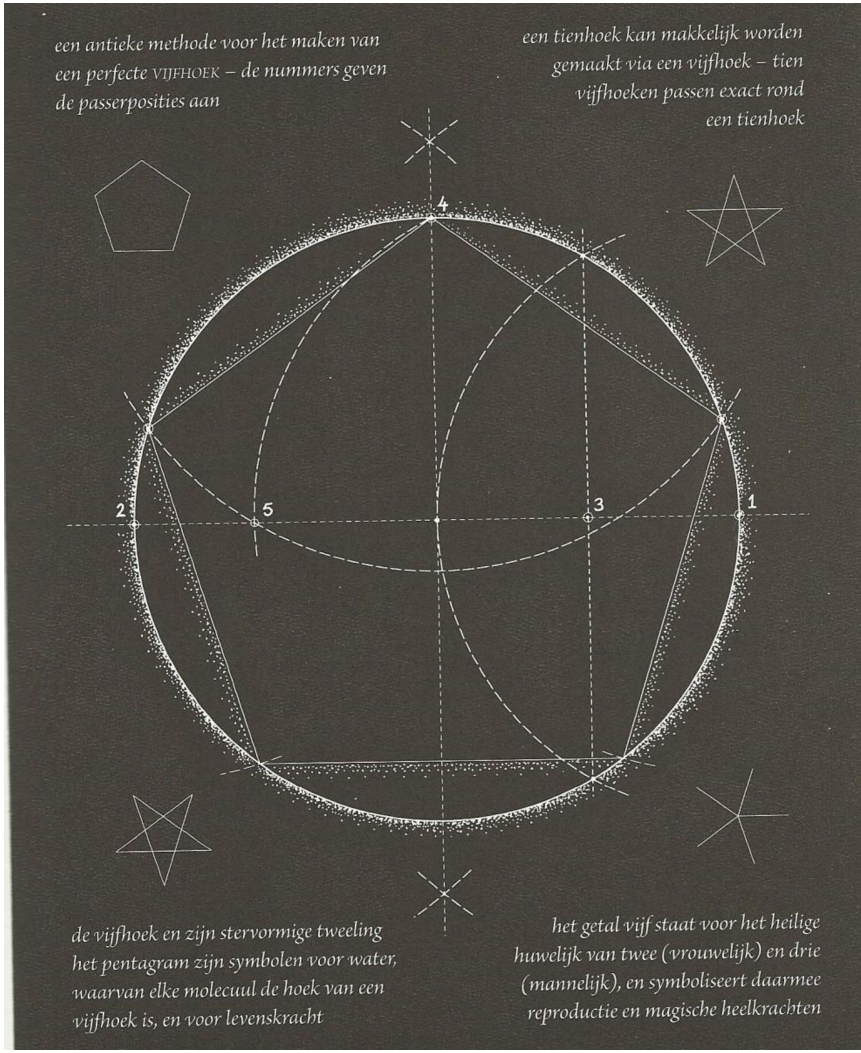
Introductieles

Van vijfhoek

naar pentagram

Voorleesstukje:
'Dodelijk patroon' van
J. NESBØ

Hierbij kan je ook
'de gulden snede'
uitleggen.

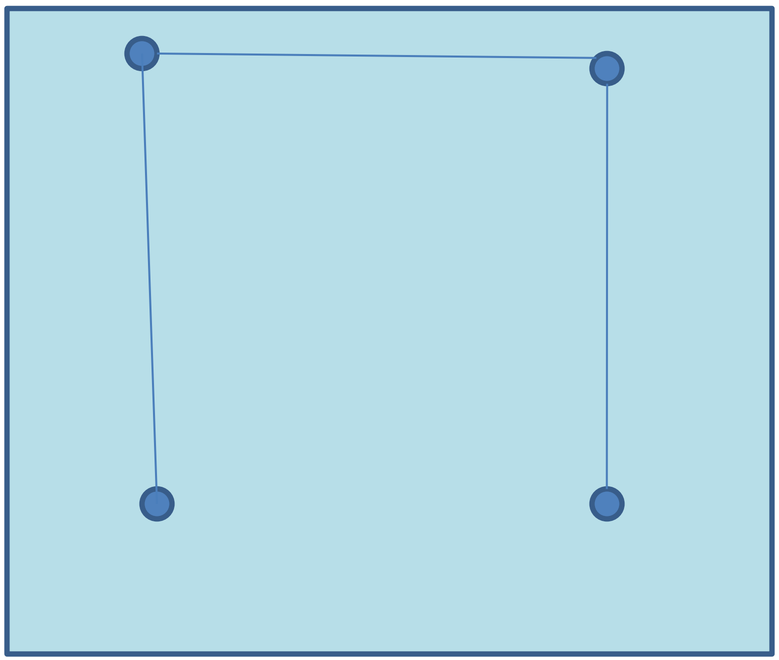


Het werkboekje

- Kortste afstand bepalen om punten te verbinden in:
  - Vierkant
  - Driehoek

Werkboekje met opdrachten

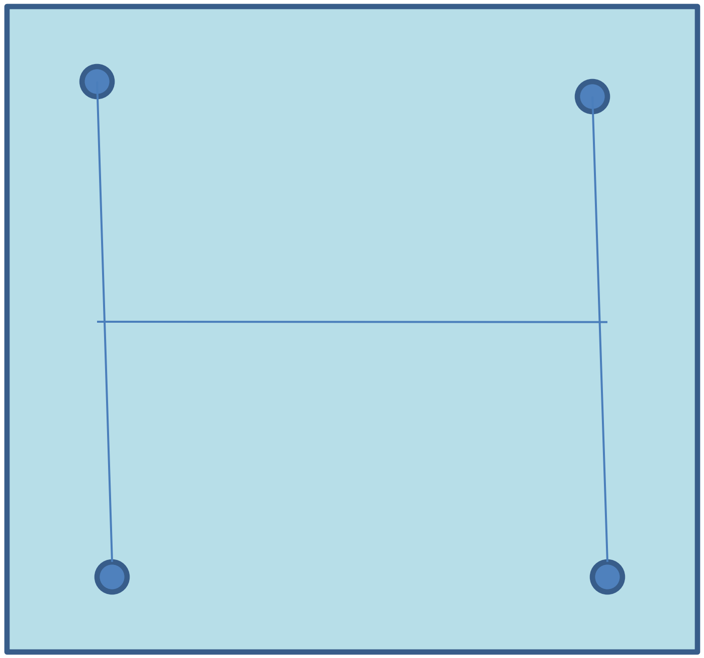
- **<u>Afstand tussen tenten is 100 in de volgende dia's</u>**



dus weglengte =

300

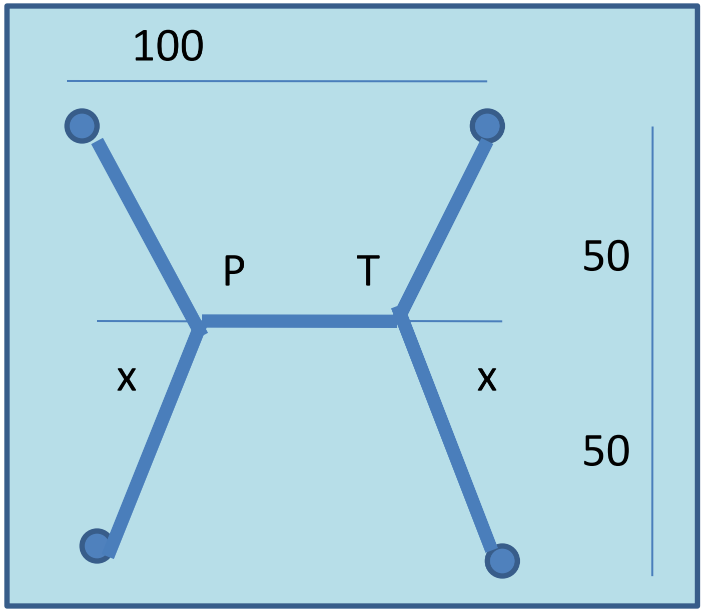
Werkboekje met opdrachten



- Lengte wegennet: 100+100+100=300

Werkboekje met opdrachten

- Stel PT = 100-2x. En PT op helft van hoogte.



- **OPDRACHT**: Stel de formule van het minimale wegennet op als functie van x.

Werkboekje met opdrachten

- Schuine stuk =

$$\sqrt{(50*50 + x*x)}$$

- Lengte wegennet als functie van x

$$L= (100-2x) +4* \sqrt{(2500 + x^2)}$$

- Bereken de minimale weglengte. L=273 (x=28,9)
- Bereken de hoek bij punt T tussen verbindingen: $2\tan^{-1}(50/28,9)=120°$

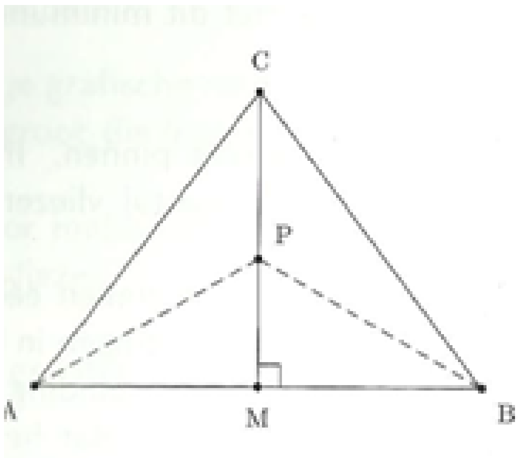
Werkboekje met opdrachten

Schakelen naar werkboekje.

Zelfde berekening ook in rechthoek en driehoek.

(bij les 3 Torricelli)

Driehoek



- Stel we hebben pinnen in de drie hoekpunten van een <u>gelijkbenige</u> driehoek ABC.
- De zijden AC en BC zijn 10 cm lang en de zijde AB is 12 cm lang. We zoeken een punt P (een imaginaire pin) binnen de driehoek met de eigenschap dat de som van de stukken PA, PB en PC zo klein mogelijk is.
- Uit symmetrie-overwegingen volgt dat P op de hoogtelijn CM moet liggen.
- Stel dat de lengte van PM gelijk is aan x.

- **OPDRACHT:**
- Druk PA en PC uit in x
  en druk de som PA + PB +PC uit in x.

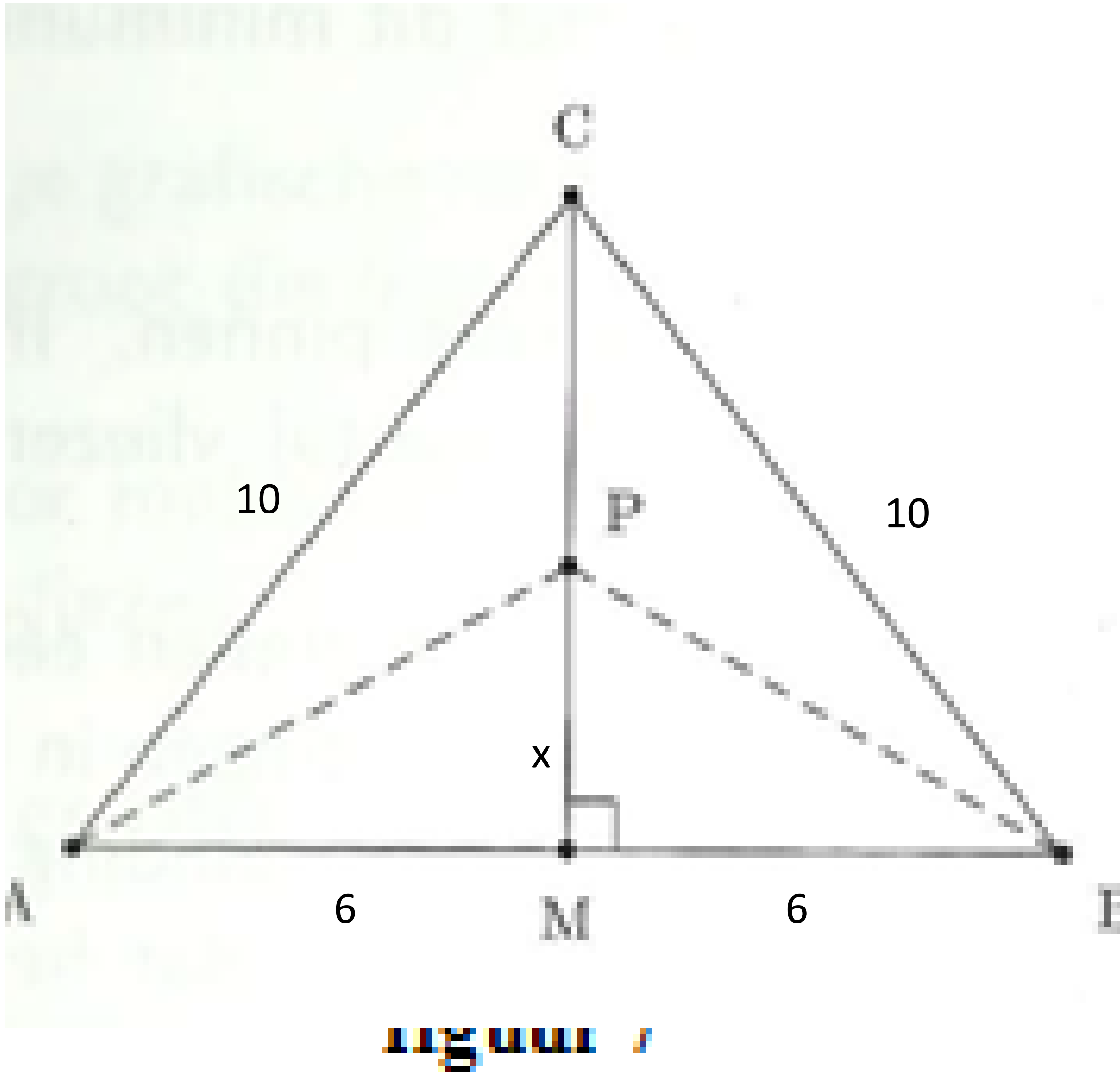
Kortste verbinding in driehoek

AC=BC=10
AB=12
PM = x

Druk PA en PC uit in x
en bepaal PA + PB +PC.

PA= PB= $\sqrt{x^2 + 36}$.
CM= $\sqrt{100-36}$= 8
PC=CM- x = 8-x
Dus:
PA+PB+PC
=$2\sqrt{x^2 + 36}+(8-x)$.

Vervolgens optimaliseren
via GR of differentiëren.



Hoeken

- Wanneer PA+PB+PC= $2\sqrt{(x^2+36)}+(8-x)$ wordt geoptimaliseerd kan je ook bepalen hoe groot de hoeken *L*APC, *L*BPC en *L*APB zijn.

- Dit levert op: Voor $x= 3,46$ is PA+PB+PC minimaal: 18,4.
- Hoek *L*APB = $2\tan^{-1}(6/3,46)= 120°$

Probleem van Steiner (punt van Torricelli)

- Binnen Δ ABC, met hoeken die kleiner zijn dan 120°, ligt een punt P zo dat de som van de afstanden van P tot de hoekpunten minimaal is en waarvoor geldt dat de lijnstukken PA, PB en PC hoeken van 120° met elkaar maken.

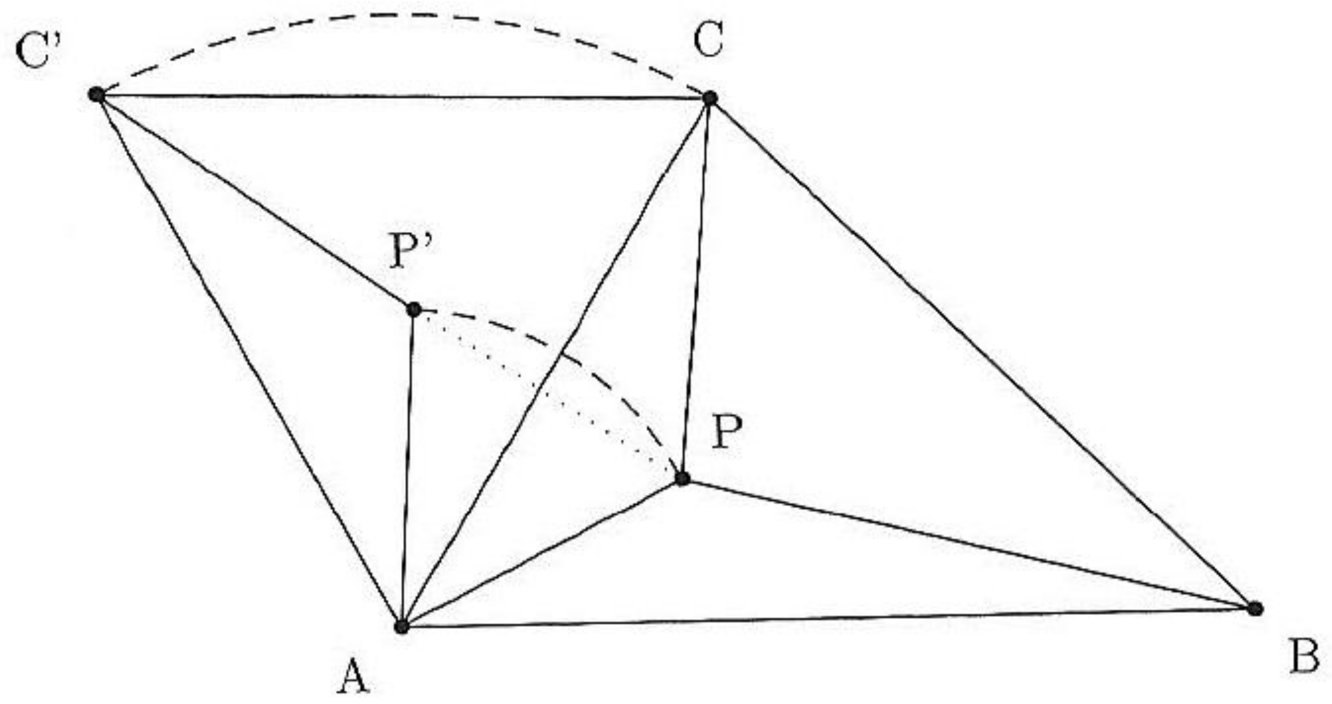
- Dit punt P wordt het **punt van Torricelli** genoemd. We gaan dit aantonen:

Bewijs van Steiner

- Constructie punt van Torricelli

- constructie punt van Torricelli.ggb

Bewijs - Steiner



Bewijs- Steiner

- Laat P een willekeurig punt zijn binnen Δ ABC. Teken op de zijde AC een gelijkzijdige driehoek ACC'. We roteren nu Δ APC om het punt A over een hoek van 60°, zo dat het beeld van AC op AC' valt. Dan ontstaat Δ AP'C'.
-
- **25** Ga na dat Δ APP' een gelijkzijdige driehoek is.
-
- PB + PA +PC= PB + PP'+ P'C'. We willen dat het linkerlid zo klein mogelijk is en dus moet het rechterlid zo klein mogelijk zijn. Dit is het geval als de zigzaglijn BPP'C'een recht lijnstuk is. Met andere woorden: als P en P' op BC' liggen.
- Omdat *L*APP'= 60° zien we nu dat *L*APB = 120°

Individuele toets

‘Ze verzinnen niks zelf’

‘Als 1 groepje een fout maakt, zie je dit terug bij alle andere groepjes’

‘ze werken alleen aan het PO en niet meer in hun boek, dus ze lopen achter.’

Oplossing: individuele toets

- Over paragraaf 1+2 van het boek en PO.

Geogebra paragraaf

- 3 opgaven die de leerlingen ook hadden gemaakt in het hoofdstuk laten maken met Geogebra

<u>én</u>

- gebruik gemaakt van Nanja de Rie (NVVW)
  - Meetkunde met geogebra

  http://www.leergangwiskunde.nl/lesmateriaal.html

  hierin komt de Stelling van Thales aan bod en wordt de omgekeerde stelling van Thales analytisch bewezen.

Resultaat

- Leerlingen vonden het leuk om met sop aan de gang te gaan, maar ook om weer eens met passer etc. te werken, wiskundige figuren te maken.
- Leerlingen bleven bij met het maken van opgaven (ook doordat er een verplichte toets aan het PO zat, en ik heel veel herhaalde dat het veel werk was)
- Duidelijk minder weerstand.
- Voor Havo (t/m les 3) voor VWO (t/m les 4)

Literatuur

- ‘bellen blazen’ – uitgave ter gelegenheid van 5 jaar NWD, februari 1999
- http://wetenschap.infonu.nl/wiskunde/63990-de-wiskunde-achter-zeepbellen.html
- http://www.fisme.science.uu.nl/nwd/cafemobius/zeepbellen.html
- http://www.fi.uu.nl/nwd/cdrom/zeepbel/welcome.htm
- Quadrivium (rekenen, meetkunde, muziek en astronomie voor iedereen), Librero, 2013
- Zeepvliezen, wetenschap en vermaak, Zebra boekje 18, H. van Lint en J. Breeman, 2004
- Geheime geometrie, S. Skinner, 2010, Librero